*

Bevis for et teorem om intepretasjoner i teorien om presise deskriptive utsagn

*

Morten Rognes

1985

*

Filosofisk institutt, Universitetet i Oslo

Bevis for et teorem om intepretasjoner i teorien om presise deskriptive utsagn.

Det følgende notat kan ikke leses som en selvstendig enhet, men er et supplement til Rognes [2], "En teori om presise deskriptive utsagn". Det forutsettes derfor et fullstendig kjenskap til dette arbeidet og forøvrig også til Rognes [1].

Hensikten er å gi et bevis for den følgende sats:

Teorem 31: Anta AêFm(L;e[Δ;0]). Da gjelder at i;1(i;2(A)) <–> i;2(i;1(A)) er et teorem i teorien T;4

Vi bemerker her at språket L;e[Δ;0] er definert i §1 i "En teori om presise deskriptive utsagn". Videre er teorien T;4 definert i§6.1 i dette arbeid og intepretasjonsfunksjonene i;1 og i;2 innført i denne paragrafen. Satsen selv er også oppført i den nevnte paragraf. Noen ytterligere kommentarer og forklaringer vil ikke bli gitt her.

Vi går så over til selve beviset for satsen:

Bevis: Beviset skjer ved induksjon på lengden av formler i L;e[Δ;0]. Er A = (D;1vD;2), (¬D;1), (D;1–>D;2), (D;1&D;2), (D;1<–>D;2), (Ax)D;1, (Ex)D;1, (xêy) eller (M(x)) er saken grei. I så tilfelle holder satsen i lys av induksjonshypotesen og det faktum at i;1, såvel som i;2, er normale med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene.

Det avgjørende er å kunne bevise at teoremet holder om A= (MV(x)), True(x,y) eller Ut(x).

Man har i lys av definisjonene av i;1 og i;2:

(1) i;1(MV(x)) = (Ew)(MV(w) & x= Mg(w': MV(w') &
(Ay)(Ut(y) –> (True(w',y) <–> True(w,y)))))
i;1(True(x,y)) = (Ew)(MV(w) & x=Mg(w': MV(w') &
(Ay)(Ut(y) –>(True(w',y) <–> True(w,y))))) &
Ut(y) & (Ew)(MV(w) & wêx & True(w,y))
i;1(Ut(x)) = Ut(x)

Dessuten har man:

(2) i;2(MV(x)) = MV(x)
i;2(Ut(x)) = (Ez)(Ut(z) & x=Mg(y: Ut(y) &
(Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> True(w,z))))
i;2(True(x,y)) = (MV(x) & (Ez)(Ut(z) & y= Mg(y': Ut(y') &
(Aw)(MV(w)–>(True(w,y') <–> True(w,z)))) &
(Ez')(z'êy & True(x,z')))

(A) Vi beviser først:

(+) i;1(i;2(MV(x))) <–> i;2(i;1(MV(x)))

Nå har man i lys av (1) at:

(3) i;1(i;2(MV(x))) = i;1(MV(x)) = (Ew)(MV(w) &
x= Mg(w': MV(w') & (Ay)(Ut(y) –> (True(w',y) <–> True(w,y)))))

Videre har man:

(4) i;2(i;1(MV(x))) = i;2((Ew)(MV(w) &
x= Mg(w': MV(w') & (Ay)(Ut(y) –> (True(w',y) <–> True(w,y)))))) =
(Ew)(MV(w) & x=Mg(w': MV(w') &
(Ay)(i;2(Ut(y)) –>(i;2(True(w',y)) <–> i;2(True(w,y))))))

Studerer man høyre-sidene i (3) og (4) ser man fort at det vil være tilstrekkelig å bevise:

(5) (Ay)(Ut(y) –>(True(w',y) <–> True(w,y)) og
(6) (Ay)(i;2(Ut(y)) –> (i;2(True(w',y)) <–> i;2(True(w,y)))

er ekvivalente gitt at (7) MV(w') & MV(w).

(i) Anta først at (7) og (5) holder med det for øye å bevise (6). Anta dessuten for vilkårlig y at (8) i;2(Ut(y)). I lys av (2) følger da:

(9) (Ez)(Ut(z) & y=Mg(y': Ut(y') &
(Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> True(w,z)))))

Anta også at (10) i;2(True(w',y)). Fra (10) følger:

(11) (Ez')(z'êy & True(w',z'))

Fra (9) følger at man for noe z må ha:

(12) Ut(z) & y=Mg(y': Ut(y') &
(Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> True(w,z))))

Fra (11) følger videre (13) z'êy & True(w',z') for noe z'. Da har man: Ut(z') & (Aw)(MV(w) –> (True(w,z') <–> True(w,z))). Det følger, siden MV(w') at True(w',z') <–> True(w',z). Siden Ut(z) følger også ved hjelp av (5) at True(w',z) <–> True(w,z). Siden True(w',z') i lys av (13) følger (14) True(w,z). Vi må derfor ha: (Ez')(z'êy & True(w,z'). Fra dette, (9) og det at MV(w) følger i;2(True(w,y)).

Tilsvarende viser man at i;2(True(w',y)) følger om man antar i;2(True(w,y)) i stedet for (10).

(ii) Vi må dessuten vise at (6) impliserer (5) under den forutsetning at (7) holder. Anta derfor (6) og først at (#) U(y) & True(w',y) for å vise at True(w,y). La z=Mg(y': Ut(y') & (Aw)(MV(w) –> (True(w,y')<–> True(w,y))). Da følger
(15) i;2(Ut(z)) og derfor i lys av (6) at (16) i;2(True(w',z)) <–> i;2(True(w,z)). Siden (17) MV(w') & yêz & True(w',y) følger i;2(True(w',z)) og dermed
i;2(True(w,z)). Men herav: (Eq)(qêz & True(w,q)). Da må det altså finnes en q slik at qêz & True(w,q). Imidlertid har man da True(w,y) <–> True(w,q) siden qêz & MV(w). Men da True(w,y).

Man viser implikasjonen den andre veien på tilsvarende måte.
Dette viser at (+) holder.

(B) Vi ønsker nå å bevise at:
(++) i;1(i;2(Ut(x))) <–> i;2(i;1(Ut(x)))

I lys av (1) og (2) har man:

(3) i;2(i;1(Ut(x))) = i;2(Ut(x)) = (Ez)(Ut(z) &
x=Mg(y: Ut(y) & (Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> True(w,z)))))

På den annen side har man:

(4) i;1(i;2(Ut(x))) = i;1((Ez)(Ut(z) &
x= Mg(y: Ut(y) &(Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> True(w,z)))))) =
(Ez)(Ut(z) & x= Mg(y: U(y) & (Aw)(i;1(MV(w)) –>
(i;1(True(w,y)) <–> i;1(True(w,z)))))

I lys av (3) og (4) ser man at det vil være tilstrekkelig å vise at

(5) (Aw)(MV(w) –>(True(w,y) <–> True(w,z)))
er ekvivalent med
(6) (Aw)(i;1(MV(w)) –> (i;1(True(w,y)) <–> i;1(True(w,z))))
gitt at (7) Ut(y) & Ut(z).

(i) Vi viser først: (##) (7)&(5) –> (6).
Anta derfor (7) og (5) holder og anta for vilkårlig w at
(8) i;1(MV(w)) & i;1(True(w,y)).
Fra (8) og definisjonen av i;1 følger:
(9) (Ew;1)(MV(w;1) & w= Mg(w;2: MV(w;2) &
(Ay)(Ut(y) –> (True(w;2,y) <–> True(w;1,y)))))
Dessuten følger: (10) Ut(y) og (11) (Ew;3)(w;3êw & MV(w;3) & True(w;3,y))
Fra (11) har man selvfølgelig for noe w;3 at
(12) w;3êw & MV(w;3) & True(w;3,y)
Fra (12) og (9) følger videre at :
(13) MV(w;1) & (Ay)(Ut(y) –> (True(w;3,y) <–> True(w;1,y)))
Fra dette og (7) har man så: (14) True(w;3,y) <–> True(w;1,y)
Siden M(w;1) har man ved hjelp av (5) at True(w;1,y) <–> True(w;1,z). Siden Ut(z) har man ved hjelp av (13) at True(w;3,z) <–> True(w;1,z). Det følger at
True(w;3,y) <–> True(w;3,z). Dette og (12) gir en (16) True(w;3,z). Fra dette og (12) følger (17) (Ew')(w'êw & MV(w') & True(w',z)). Fra dette, (9), (16) og definisjonen av i;1 kan man slutte i;1(True(w,z)). På en helt analog måte viser man at i;1(MV(w)) & i;1(True(w,z)) impliserer i;1(True(w,y)) gitt (7) og (5). Dermed har det blitt gitt et bevis for (##).

(ii) Vi viser så at (###) (7) & (6) –> (5).
Anta (7) og (6) holder og at (18) MV(w) &True(w,y) for vilkårlig w. Sett:
(19) w;1= Mg(w': MV(w') & (Ay)(Ut(y) –> (True(w',y) <–> True(w,y))))
Fra (18) og (19) følger i;1(MV(w;1)). Fra dette og (6) følger så :
(20) i;1(True(w;1,y)) <–> i;1(True(w;1,z))
Fra (18) og (19) følger videre: wêw;1 & True(w,y) & MV(w). Herav har man åpenbart: (Ew)(wêw;1 & True(w,y) & MV(w)). Dette og (19), samt det faktum at Ut(y), impliserer i;1(True(w;1,y)). Fra dette og (20) følger: i;1(True(w;1,z)). Herav: (Ew;2)(w;2êw;1 & True(w;2,z) & MV(w;2)). Da må man altså ha
w;2êw1 & True(w;2,z) & MV(w;2) for noe w;2. Siden Ut(z) følger fra dette i lys av (19) at True(w;2,z) <–> True(w,z). Herav: True(w,z).

På en helt analog måte ser man at MV(w) & True(w,z) impliserer True(w,y). Dette viser at (###) holder. Dermed har vi også fullført beviset for (++).

(C) For å fullføre beviset for beviset for vårt teorem er det også nødvendig å vise at den følgende setning er et teorem i T;4:

(+++) i;1(i,2(True(x,y))) <–> i;2(i;1(True(x,y)))

I lys av (1) og (2) har man:
(3) i;2(i;1(True(x,y))) = i;2(i;1(MV(x)) &
i;1(Ut(y)) & (Ew)(MV(w) & wêx & True(w,y))) =
i;2(i;1(MV(x))) & i;2(i;1(Ut(y))) &
i;2((Ew)(MV(w) & wêx & True(w,y))) =
i;2(i;1(MV(x))) & i;2(i;1(Ut(y))) & (Ew)(MV(w) & wêx & i;2(True(w,y)))
På den annen side har man også at:

(4) i;1(i;2(True(x,y)) =
i;1(i;2(MV(x)) & i;2(Ut(y)) & (Ez')(z'êy & True(x,z'))) =
i;1(i;2(MV(x))) & i;1(i;2(Ut(y))) & (Ez')(z'êy & i;1(True(x,z')))

I lys av (3) og (4) og det som ble vist under (A) og (B) ovenfor ser man at det vil være tilstrekkelig å bevise:

($) i,1(i;2(MV(x)) & i;2(i;1(Ut(y))) –>
((Ew)(MV(w) & wêx & i;2(True(w,y))) <–>
(Ez')(z'êy & i;1(True(x,z'))))

(i) Anta først at (1) i,1(i;2(MV(x)) & i;2(i;1(Ut(y))) og dessuten:
(2) ((Ew)(MV(w) & wêx & i;2(True(w,y))). Vi ønsker å vise:
(p;1) (Ez')(z'êy & i;1(True(x,z')))

Fra (1) følger i lys av det vi har vist under (A) og (B) at:
(3) (Ew)(MV(w) & x= Mg(w': MV(w') &
(Ay)(Ut(y) –> (True(w',y) <–> True(w,y)))))
og (4) (Ez)(U(z) & y=Mg(y': Ut(y') &
(Aw)(MV(w) –> (True(w,y') <–> True(w,z)))))

Fra (2) og definisjonen av i;2 følger for noe w:
(5) MV(w) & wêx & (Ez')(z'êy & True(w,z'))

Det vil være tilstrekkelig å vise at (3) – (5) impliserer (p;1). p;1 er imidlertid ekvivalent med:
(p;2) (Ez')(z'êy & (Ew)(MV(w) &
x= Mg(w': MV(w') & (Ay)(Ut(y) –>(True(w',y) <–> True(w,y))))) &
Ut(z') & (Ew)(MV(w) & wêx & True(w,z')))

Fra (5) følger (6) MV(w) & wêx & True(w,z') for noe z' der (7) z'êy. Fra (6) og (7) samt (3) – (5) følger umiddelbart (p;2).

(ii) Anta på den annen side at
(1) i,1(i;2(MV(x)) & i;2(i;1(Ut(y))) og
(2) (Ez')(z'êy & i;1(True(x,z')))

Vi må nå vise: (q;1) (Ew)(MV(w) & wêx & i;2(True(w,y))) Fra (1) følger i lys av det som har blitt vist under (A) og (B) at:
(3) (Ew)(MV(w) & x= Mg(w': MV(w') &
(Ay)(Ut(y) –> (True(w',y) <–> True(w,y)))))
og (4) (Ez)(U(z) & y=Mg(y': Ut(y') &
(Aw)(MV(w) –> (True(w,y') <–> True(w,z)))))

Fra (2) følger eksistensen av z' der (5) z'êy & (Ew)(MV(w) & wêx & True(w,z')). I lys av definisjonen av i;2 er det vi må bevise:

(q;2) (Ew)(MV(w) & wêx & (Ez)(Ut(z) & y= Mg(y': Ut(y') & (Aw)(MV(w) –> (True(w,y') <–> True(w,z))))) & (Ez')(z'êy & True(w,z')))). Man ser imidlertid lett at dette følger fra (3) – (5). Dette avslutter beviset for ($) og dermed beviset for (+++).

I lys av de resultatene som har blitt etablert under punkt (A) – (C) har vi følgelig levert et fullstendig bevis for Teorem 31. **Q.E.D.**

***

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985

*

Copyright beskrivelse

Dette arbeidet er © Morten Rognes 2002. Det er fullstendig fritt i den forstand at man kan kopiere det for eget bruk og distribuere kopier til andre så lenge dette ikke er for salg eller økonomisk vinning. *Kopier må være av arbeidet i sin helhet og i sin opprinnelige form slik det er distribuert her, og må i tillegg inneholde denne copyright-beskrivelsen skrevet på norsk* .

Det er lov til å sitere fra dette arbeidet i egne skrifter etter de regler og standarder som er internasjonalt akseptert for sitering i vitenskapelige publikasjoner. Under ingen omstendigheter er det lov å sitere deler av dette arbeid, eller hele dette arbeid, på en slik måte at man utgir det for å være ens eget.

Henvisninger til dette arbeid bør inneholde de følgende data i en komma-separert liste: etternavnet til denne forfatteren, fornavnet til denne forfatteren, tittelen på arbeidet, årstallet det opprinnelig ble skrevet som angitt på tittelbladet, uttrykket "Upublisert", den fullstendige URL fra hvilket dette arbeidet ble lastet ned, dato og årstall for nedlasting, samt det versjonsnummeret som er angitt på tittelbladet. Eksempel:

> Rognes, Morten, "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", 1985, Upublisert, http://www.uio.no/~mrognes/arbeider/mrog73a.sit.hqx, 4-4-2002, v1.00.